Existence and nonexistence of ground state solution for semilinear elliptic equation involving Hardy-Sobolev critical exponent (Analysis on Shapes of Solutions to Partial Differential Equations)

AUTHOR(S):

橋詰, 雅斗

Existence and nonexistence of ground state solution for semilinear elliptic equation involving Hardy-Sobolev critical exponent

愛媛大学大学院理工学研究科　橋詰　雅斗 *
Masato Hashizume
Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

1　序文

$N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を境界が滑らかな有界領域, $0 \in \partial\Omega$ とする．また, $s \in (0,2)$, $2^*(s) = 2(N-s)/(N-2)$ とし, $\lambda > 0$ をパラメータとする．本研究では以下の臨界 Hardy-Sobolev 型の非線形項を持つ楕円型方程式を考察する．

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = \frac{u^{2^*(s)-1}}{|x|^s}, \quad u > 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

この方程式内の臨界 Hardy-Sobolev 項に関して, $s = 0$ のときは $u^{\frac{N+2}{N-2}}$ で臨界 Sobolev 項となり, $s = 2$ のときは $u/|x|^2$ で Hardy 項となる．臨界 Hardy-Sobolev 項 ($s \in (0,2)$) の特徴は, 非線形でありながら特異点を持つという、両端点ではどちらかしか持たない性質をどちらも持ち合わせているという点である．また, パラメータ λ は次のような意味を持つ:

v を次の方程式の解とする．

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \frac{u^{2^*(s)-1}}{|x|^s}, \quad u > 0 & \text{in} \quad \sqrt{\lambda}\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on} \quad \partial(\sqrt{\lambda}\Omega). \end{cases}$$

このとき, $v_\lambda(x) = \sqrt{\lambda}^{\frac{N-2}{2}} v(\sqrt{\lambda}x)$ は (1) の解となる．従って, パラメータ λ は領域のスケールを制御しているものであり, 方程式における領域のスケールに関する性質は全て λ に関する性質と見てよい．

ここで,

$$Q_\lambda(f) := \frac{\int_\Omega (|\nabla f|^2 + \lambda f^2) dx}{\left(\int_\Omega \frac{|f|^{2^*(s)}}{|x|^s} dx\right)^{\frac{2}{2^*(s)}}}, \quad \mu^N_{s,\lambda}(\Omega) := \inf_{u \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}} Q_\lambda(u)$$

とし, (1) の最小エネルギー解を次で定義する．

定義 1.1. $v_\lambda \in H^1(\Omega)$ が (1) の最小エネルギー解であるとは, v_λ が (1) の弱解であり, $Q_\lambda(v_\lambda) = \mu^N_{s,\lambda}(\Omega)$ を満たすことである．

*本研究は科研費（課題番号:16J08945, 18J01019）の助成を受けたものである．

定数 $\mu_{s,\lambda}^N(\Omega)$ は Hardy-Sobolev 型埋め込み $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*(s)}(\Omega, |x|^{-s}dx)$ における有界性の不等式 (臨界 Hardy-Sobolev 不等式) 内に現れる最良定数である．この $\mu_{s,\lambda}^N(\Omega)$ に関する最小化問題は, 臨界 Hardy-Sobolev 不等式における等号成立の成否を問う問題であり, 不等式の研究において極めて重要な問題である．そして, 定義 1.1 と $\mu_{s,\lambda}^N(\Omega)$ の最小化関数が満たす Euler-Lagrange 方程式より, (1) の最小エネルギー解の存在と, $\mu_{s,\lambda}^N(\Omega)$ を達成する最小化関数の存在は同値なものとなる.

2　既存の結果と先行研究

臨界 Hardy-Sobolev 不等式に関連する最小化問題についての既存の結果及び先行研究について紹介する．この節に限り, 領域 Ω として, 有界領域, $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}_+^N$:半空間を扱う．また, 本研究の中で主として扱う Neumann 問題 $\mu_{s,\lambda}^N(\Omega)$ の他に, Dirichlet 問題

$$\mu_s^D(\Omega) := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} Q_0(u)$$

に関する結果も記す．これらの問題に関して, 有界領域に関しては,

(i) $0 \notin \overline{\Omega}$

(ii) $0 \in \partial\Omega$

(iii) $0 \in \Omega$

と場合分けして紹介する.

2.1　有界領域における最小化問題

まず, Neumann 型の最小化問題に関する既知の事実及び先行研究を紹介する．(i) の場合において, 埋め込み $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*(s)}(\Omega, |x|^{-s}dx)$ はコンパクトになる．従って, $\mu_{s,\lambda}^N(\Omega)$ の最小化関数は存在する．一方, (ii), (iii) の場合, 埋め込みは非コンパクトであることが知られており, これは有界列の集中現象によるものであることも知られている. 具体的に, $u \in C_0^\infty(\Omega)$ を一つとり, u_n を Ω/n 内で $u_n(x) := n^{\frac{N-2}{2}} u(nx)$, Ω/n の外で $u_n(x) = 0$ と定義すれば, これが非コンパクトな列となる．この埋め込みの非コンパクト性から, (ii), (iii) の場合は最小化関数の存在・非存在に関して非自明となる．(ii) において, 次の結果のみが知られていた.

定理 2.1 (Ghoussoub-Kang [4])**.** 領域 Ω に関して, $0 \in \partial\Omega$ 及び原点での平均曲率を正とする．このとき, 任意の λ に対して $\mu_{s,\lambda}^N(\Omega)$ の最小化関数は存在する.

このように, 領域の幾何学的性質である平均曲率が最小化関数の存在の十分条件になることが知られている．この平均曲率と最小化関数との関係は, 臨界 Sobolev 項 ($s = 0$) の場合においても現れる. 臨界 Sobolev 型方程式の研究は, Adimurthi-Mancini [1], Wang [15] によって最小化関数の存在が示されたことを皮切りに, 正値解の一意性に関する研究 [2, 3, 16, 17], $\lambda \to +\infty$ における最小エネルギー解の漸近挙動に関する研究 [10, 13, 14] など, 現在まで数多くの先行研究が存在する．(iii) においては [8] による結果が得られているが, この結果の詳細は次節で紹介する.

よって未解決な問題は, (ii) の場合における原点での平均曲率が非正の場合である．この

問題を本研究では扱い, 結果の詳細を次節以降で記す.

Dirichlet 型の最小化問題についても紹介する. (i) に関しては, $\mu_{s,\lambda}^N(\Omega)$ と同様, 埋め込みのコンパクト性から最小化関数が存在する. (ii) に関しては, $\Omega \subset \mathbb{R}_+^N$ となるような Ω に関しては最小化関数は存在しない. 一方, 次の結果も得られている.

定理 2.2 (Ghoussoub-Robert [5], [6]). 領域 Ω に関して, $0 \in \partial\Omega$ 及び $0 \in \partial\Omega$ での平均曲率を負とする. このとき, $\mu_s^D(\Omega)$ の最小化関数は存在する.

(iii) の場合, $\mu_s^D(\Omega)$ は領域 Ω に依存せず一定の値で, $\mu_s^D(\Omega)$ を達成する最小化関数は存在しない, という事実が知られている.

2.2 $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}_+^N$ における最小化問題

よく知られた事実として, 次の結果がある:

$\mu_s^D(\mathbb{R}^N)$ を達成する最小化関数は存在し, その関数は

$$U_{a,\varepsilon}(x) = aU\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (a, \varepsilon > 0), \quad U(x) = \left(1 + \frac{|x|^{2-s}}{(N-s)(N-2)}\right)^{-\frac{N-2}{2-s}}$$

である.

この結果を用いると, $\mu_s^N(\mathbb{R}_+^N) := \mu_{s,0}^N(\mathbb{R}_+^N) = \mu_s^D(\mathbb{R}^N)/2^{\frac{2-s}{N-s}}$ であり, $\mu_s^N(\mathbb{R}_+^N)$ を達成する最小化関数は $U_{a,\varepsilon}$ であることも分かる.

注意 2.1. 簡単のため, 全ての $N \geq 3$ において $\mu_s^D(\mathbb{R}^N)$ 及び $\mu_s^N(\mathbb{R}_+^N)$ の最小化関数は存在する, と記しているが, 厳密には $N = 3, 4$ では最小化関数は存在しない. $N = 3, 4$ の場合, $U_{a,\varepsilon} \notin L^2(\mathbb{R}^N)$ であるため, $U_{a,\varepsilon} \notin H_0^1(\mathbb{R}^N)$ となる. 最小化問題を定義する関数空間を $H_0^1(\mathbb{R}^N)$ に替えて $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ とすれば, $U_{a,\varepsilon} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ であるため, $U_{a,\varepsilon}$ が最小化関数となる.

3 主結果, 関連結果

3.1 主結果

ここでは $0 \in \partial\Omega$ での平均曲率が非正の場合の結果を紹介する.

定理 3.1 ([7]). $N \geq 4$ とし, $0 \in \partial\Omega$ での平均曲率を非正とする. このとき, ある定数 $\lambda_* = \lambda_*(\Omega)$ が存在して,

(I) $\lambda \in (0, \lambda_*)$ のとき, (1) の最小エネルギー解は存在する.

(II) $\lambda > \lambda_*$ のとき, (1) の最小エネルギー解は存在しない.

(III) $0 \in \partial\Omega$ での平均曲率が負のとき, $\lambda = \lambda_*$ における (1) の最小エネルギー解は存在する.

定理 3.2 ([7]). λ が十分小さいとき, (1) の最小エネルギー解は唯一つである.

注意 3.1. $N = 3$ における最小エネルギー解の存在・非存在は未解決のままである. これは注意 2.1 と関係がある. 次節で紹介するように, 定理の証明にあたっては爆発解析を用いるが, この時の無限遠方の挙動を制御する際に $U_{a,\varepsilon} \notin L^2(\mathbb{R}^N)$ の影響が現れてくる.

原点での平均曲率が負の場合, (III) より最小エネルギー解の存在と $\lambda \in (0, \lambda_*]$ は同値となることが分かる. また, $\{\lambda_i\}$ を $\lambda_i \nearrow \lambda_*$ $(i \to \infty)$ を満たす列とすると, 対応する最小エネルギー解の列 $\{v_{\lambda_i}\}$ は相対コンパクトとなり, $v_{\lambda_i} \to v_{\lambda_*}$ となる.

3.2 関連結果

関連結果として, $0 \in \Omega$ の場合の結果も紹介する.

定理 3.3 ([8])**.** $0 \in \Omega$ とする. このとき, ある定数 $\lambda_{**} = \lambda_{**}(\Omega)$ が存在して,

(I) $\lambda \in (0, \lambda_{**})$ のとき, (1) の最小エネルギー解は存在する.

(II) $\lambda > \lambda_{**}$ のとき, (1) の最小エネルギー解は存在しない.

注意 3.2. 定理 3.3 は全ての $N \geq 3$ で成り立つ. これは, 証明の際に $U_{a,\varepsilon}$ を使うことがなく, 次元による制約を課さなくてよいためである. ただし, $\lambda = \lambda_{**}$ の場合は未解決な問題となっており, これは定理 3.1 (III) と状況が似ている.

4 最小エネルギー解の漸近挙動とエネルギーの漸近展開

4.1 準備

ここでは $\mu^N_{s,\lambda}(\Omega)$ に関する諸性質を挙げる. 当然のことではあるが, 最小化関数は存在するか存在しないかのどちらかしかない. この存在・非存在に関して, パラメータ λ との関係を明らかにする.

補題 4.1. (i) $\mu^N_{s,\lambda}(\Omega)$ は λ に関して連続, 非減少関数である.

(ii) 任意の $\lambda > 0$ に関して $\mu^N_{s,\lambda}(\Omega) \leq \mu^N_s(\mathbb{R}^N_+)$ が成り立つ.

(iii) $\lim_{\lambda \to 0} \mu^N_{s,\lambda}(\Omega) = 0$ が成り立つ.

(i) は $\mu^N_{s,\lambda}(\Omega)$ の定義から自然に得られる. (ii), (iii) の証明に関しては, $\mu^N_{s,\lambda}(\Omega) \leq Q_\lambda(u)$ が任意の $u \in H^1(\Omega)$ で成り立つことを用いる. (ii) は $\lim_{\varepsilon \to 0} Q_\lambda(U_{1,\varepsilon}) = \mu^N_s(\mathbb{R}^N_+)$ より, (iii) は定数 C を用い, $\lim_{\lambda \to 0} Q_\lambda(C) = 0$ よりそれぞれ成り立つ.
$\mu^N_{s,\lambda}(\Omega)$ の値と最小化関数の存在・非存在には次の補題のような関係がある.

補題 4.2. (i) $\mu^N_{s,\lambda}(\Omega) < \mu^N_s(\mathbb{R}^N_+)$ が成り立つならば, $\mu^N_{s,\lambda}(\Omega)$ の最小化関数は存在する.

(ii) ある $\lambda' > 0$ において $\mu^N_{s,\lambda'}(\Omega) = \mu^N_s(\mathbb{R}^N_+)$ が成り立つならば, 任意の $\lambda > \lambda'$ において $\mu^N_{s,\lambda}(\Omega)$ の最小化関数は存在しない.

(i) は concentration compactness lemma より成り立つ. つまり, $\mu^N_{s,\lambda}(\Omega)$ の最小化列に関して, 集中現象が起こるならばそのエネルギーは $\mu^N_s(\mathbb{R}^N_+)$ に達する, という事実を用いて証明する. (ii) は背理法で証明する. 実際, $\lambda > \lambda'$ となる λ において, $\mu^N_{s,\lambda}(\Omega)$ の最小化関数 u_λ が存在したとすると, 補題 4.1 (ii) より,

$$\mu^N_s(\mathbb{R}^N_+) = \mu^N_{s,\lambda'}(\Omega) \leq Q_{\lambda'}(u_\lambda) < Q_\lambda(u_\lambda) = \mu^N_{s,\lambda}(\Omega) \leq \mu^N_s(\mathbb{R}^N_+)$$

が成り立つが, これは矛盾である.
これらの補題から, 次が得られる.

命題 4.3. 次の 2 つうちどちらか一方のみが必ず成り立つ.

(A) 任意の $\lambda > 0$ において, $\mu^N_{s,\lambda}(\Omega) < \mu^N_s(\mathbb{R}^N_+)$ が成り立ち, $\mu^N_{s,\lambda}(\Omega)$ の最小化関数が存在する.

(B) ある定数 λ_* が存在して, $\lambda \in (0, \lambda_*)$ のとき $\mu^N_{s,\lambda}(\Omega) < \mu^N_s(\mathbb{R}^N_+)$ が成り立ち, $\mu^N_{s,\lambda}(\Omega)$ の最小化関数が存在する. $\lambda \geq \lambda_*$ のとき $\mu^N_{s,\lambda}(\Omega) = \mu^N_s(\mathbb{R}^N_+)$ が成り立ち, $\lambda > \lambda_*$ のとき最小化関数は存在しない.

補題 4.1, 4.2 の証明からも分かるように, この命題は任意の Ω で成り立つ. 原点での平均曲率が正の場合, Ghoussoub-Kang [4] により (A) が成り立っていることが分かる. これに対して, 平均曲率が非正の場合は (B) が成り立つというのが定理 3.1 の主張である.

(B) が成り立つことを証明するためには背理法を用いる. 任意の λ において (1) の最小エネルギー解 $v_\lambda \in H^1(\Omega)$ が存在したと仮定し, この v_λ の $\lambda \to +\infty$ に関する漸近挙動を詳細に調べることにより矛盾を導く.

注意 4.1. 楕円型正則性の議論より, $v_\lambda \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^2_{loc}(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ が成り立つ. 特に $\sup_{x\in\Omega} v_\lambda(x) < +\infty$ が成り立っている.

4.2 爆発解析

ここでは $\lambda \to +\infty$ における v_λ の漸近挙動及び $Q_\lambda(v_\lambda)$ の漸近展開を考察する. $\alpha_\lambda, \beta_\lambda \in \mathbb{R}$, 及び $x_\lambda \in \overline{\Omega}$ を次で定義する:

$$\alpha_\lambda = \|v_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} = v_\lambda(x_\lambda),\ \beta_\lambda = \alpha_\lambda^{-\frac{2}{N-2}}$$

以下の二つの命題の証明は [7] に譲る.

命題 4.4. $\lambda \to +\infty$ において,

(i) 全ての $x \in \Omega$ において, $v_\lambda(x) \to 0$,

(ii) $\alpha_\lambda^{\frac{4}{N-2}}/\lambda = (\lambda\beta^2)^{-1} \to +\infty$,

(iii) $|x_\lambda| = o(\beta_\lambda)$

が成立する. また, 任意の $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ に対し, ある λ_0 が存在し, $\lambda > \lambda_0$ ならば

(iv) $\left| \dfrac{v_\lambda(x)}{\alpha_\lambda} - U\left(\dfrac{\Psi(x)}{\beta_\lambda}\right) \right| < \varepsilon \quad \text{in} \quad \Omega \cap B_{\beta_\lambda \delta}$,

(v) $v_\lambda \leq 2\varepsilon\lambda^{\frac{N-2}{4-2s}} \exp(-\gamma_0 \xi(x) \lambda^{\frac{1}{2}}) \quad \text{in} \quad \Omega \setminus B_\delta$,

が成立する. ここで, Ψ は原点近傍での境界 $\partial\Omega$ を平坦に変換する微分同相写像, $\xi(x) = \min\{\eta_0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega \cap B_\delta)\}$ であり, $\eta_0 = \eta_0(\Omega)$, $\gamma_0 = \gamma_0(\Omega, \varepsilon)$ は正の定数である.

命題 4.5. $N \geq 4$ とする. このとき, $\lambda \to +\infty$ において, N と s のみに依存する正定数 C_1, C_2 が存在して

$$\mu^N_{s,\lambda}(\Omega) = Q_\lambda(v_\lambda) = \begin{cases} \mu^N_s(\mathbb{R}^N_+) - C_1 H(0)\varepsilon + C_2\lambda\varepsilon^2 + o(\lambda\varepsilon^2) & (N \geq 5) \\ \mu^N_s(\mathbb{R}^N_+) - C_1 H(0)\varepsilon + C_2\lambda\varepsilon^2 \log\frac{1}{\lambda\varepsilon^2} + O\left(\lambda\varepsilon^2 + \varepsilon^2\log\frac{1}{\lambda\varepsilon^2}\right) & (N = 4) \end{cases}$$

が成り立つ. ここで, $H(0)$ は原点での平均曲率, $0 < \varepsilon = O(1/\lambda)$ である.

この命題 4.5 より, 平均曲率が非正の場合において, λ が十分大きいところで $\mu_{s,\lambda}^N(\Omega) > \mu_s^N(\mathbb{R}_+^N)$ が成り立つことによる補題 4.1(ii) との矛盾から, (B) を導くことができる. 命題 4.5 に現れる平均曲率は, 命題 4.4 に登場する微分同相写像 Ψ により引き出すことが可能となった. この Ψ は Lin-Ni-Takagi [9] により最初に発見され, [10, 11, 12] などでも紹介されている.

(III) の証明についても背理法で行う. (I) より, 任意の $\lambda < \lambda_*$ で (1) の最小化関数が存在するため, $\|v_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \to +\infty$ $(\lambda \nearrow \lambda_*)$ と仮定して矛盾を導く. 実際, $\|v_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \to +\infty$ $(\lambda \nearrow \lambda_*)$ を仮定すると, 命題 4.4, 4.5 と類似の結果が得られ, やはり $\mu_{s,\lambda}^N(\Omega) > \mu_s^N(\mathbb{R}_+^N)$ が成り立つため矛盾となる. このことから, $\|v_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)}$ の λ に関する一様有界性が得られ, 結果として, Lebesgue の優収束定理から,

$$v_\lambda \rightharpoonup v_{\lambda_*} \text{ weakly in } H^1(\Omega), \quad \mu_{s,\lambda_*}^N(\Omega) = \lim_{\lambda \nearrow \lambda_*} \mu_{s,\lambda}^N(\Omega) = \lim_{\lambda \nearrow \lambda_*} Q_\lambda(v_\lambda) \geq Q_{\lambda_*}(v_{\lambda_*})$$

が成り立つため, v_{λ_*} が最小化関数となる.

5 最小エネルギー解の一意性

最後に, 定理 3.2 の証明を述べる. 鍵となる命題は次の命題である.

命題 5.1. $\lambda \to 0$ のとき, $\|v_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ が成り立つ.

この命題を用いて証明を行う. $\{\lambda_i\}$ を $\lambda_i \to 0$ $(i \to \infty)$ を満たす列, u_i, v_i をそれぞれ (1) の λ_i における最小エネルギー解とし, $A_i := \|u_i - v_i\|_{L^\infty(\Omega)} \neq 0$ とする. $z_i = A_i^{-1}(u_i - v_i)$ とおくと, (1) より,

$$\begin{cases} -\Delta z_i + \lambda_i z_i = \frac{u_i^{2^*(s)-1} - v_i^{2^*(s)-1}}{(u_i - v_i)|x|^s} z_i & \text{in} \quad \Omega, \\ \frac{\partial z_i}{\partial \nu} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

が成り立つ. 右辺に関して平均値の定理と命題 5.1 を使い, $\|z_i\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$ を用いると, 楕円型正則性より, $z_i \to z_0$ in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$,

$$\begin{cases} -\Delta z_0 = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \frac{\partial z_0}{\partial \nu} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

が成り立つ. さらに, $\|z_0\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{i\to\infty} \|z_i\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$ より, $z_0 \equiv 1$ が分かる. 一方, u_i, v_i は (1) の最小エネルギー解より,

$$\int_\Omega \frac{u_i^{2^*(s)-2} - v_i^{2^*(s)-2}}{|x|^s} u_i v_i dx = 0$$

が成り立つ. これは, 任意の i において $u_i - v_i$ は符号変化することを意味しているが, 符号変化することは $z_i \to 1$ in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ に矛盾する.

以上のようにして λ が十分小さいときの一意性を証明する.

参考文献

[1] Adimurthi, G. Mancini, The Neumann problem for elliptic equations with critical nonlinearity. Nonlinear analysis, 9-25, Sc. Norm. Super. di Pisa Quaderni, Scuola Norm. Sup., Pisa, 1991.

[2] Adimurthi; S. L. Yadava, Existence and nonexistence of positive radial solutions of Neumann problems with critical Sobolev exponents. Arch. Rational Mech. Anal. 115 (1991), no. 3, 275-296.

[3] Adimurthi, S. L. Yadava, On a conjecture of Lin-Ni for a semilinear Neumann problem. Trans. Amer. Math. Soc. 336 (1993), no. 2, 631-637.

[4] N. Ghoussoub, X. S. Kang, Hardy-Sobolev critical elliptic equations with boundary singularities. Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire 21 (2004), no. 6, 767-793.

[5] N. Ghoussoub, F. Robert, Concentration estimates for Emden-Fowler equations with boundary singularities and critical growth. IMRP Int. Math. Res. Pap. 2006 (2006), 21867.

[6] N. Ghoussoub, F. Robert, The effect of curvature on the best constant in the Hardy-Sobolev inequalities. Geom. Funct. Anal. 16 (2006), no. 6, 1201-1245.

[7] M. Hashizume, Asymptotic behavior of the least-energy solutions of a semilinear elliptic equation with the Hardy-Sobolev critical exponent. J. Differential Equations 262 (2017), no. 3, 3107-3131.

[8] M. Hashizume, Minimization problem on the Hardy-Sobolev inequality. (English summary) NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 24 (2017), no. 3, Art. 22, 12 pp.

[9] C.-S. Lin, W.-M. Ni, I. Takagi, Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system. J. Differential Equations 72 (1988), no. 1, 1-27.

[10] W.-M. Ni, X. B. Pan, I. Takagi, Singular behavior of least-energy solutions of a semilinear Neumann problem involving critical Sobolev exponents. Duke Math. J. 67 (1992), no. 1, 1-20.

[11] W.-M. Ni, I. Takagi, Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem. Duke Math. J. 70 (1993), no. 2, 247-281.

[12] W.-M. Ni, I. Takagi, On the shape of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem. Comm. Pure Appl. Math. 44 (1991), no. 7, 819-851.

[13] X. B. Pan, Condensation of least-energy solutions: the effect of boundary conditions. Nonlinear Anal. 24 (1995), no. 2, 195-222.

[14] X. B. Pan, X. Xu, Least energy solutions of semilinear Neumann problems and asymptotics. (English summary) J. Math. Anal. Appl. 201 (1996), no. 2, 532-554.

[15] X.-J. Wang, Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. J. Differential Equations 93 (1991), no. 2, 283-310.

[16] J. Wei, X. Xu, Uniqueness and a priori estimates for some nonlinear elliptic Neumann equations in $\mathbb{R}^3$. (English summary) Pacific J. Math. 221 (2005), no. 1, 159-165.

[17] M. Zhu, Uniqueness results through a priori estimates. I. A three-dimensional Neumann problem. (English summary) J. Differential Equations 154 (1999), no. 2, 284-317.